**NOȚIUNI DE MECANICĂ ANALITICĂ**

Așa cum am spus în lecțiile anterioare, obiectul de bază al mecanicii este punctul material. *Mișcarea punctului material sau a ansamblurilor de puncte materiale în spațiu și timp constituie obiectul mecanicii*.

Din punct de vedere logic, mărimile mecanice fundamentale (cu excepția noțiunilor de spațiu și timp) precum și legile ce constituie axiomele mecanicii pot fi alese în mod diferit. Important este ca pornind de la oricare dintre aceste grupuri de axiome (principii) ale mecanicii să se regăsească aceleași consecințe verificabile experimental.

*O deducere a fenomenelor mecanice pornind de la un anumit grup de axiome (principii) poartă denumirea de* ***descriere a mecanicii***.

Conform observațiilor de mai sus, toate descrierile mecanicii clasice sunt echivalente între ele. Descrierile mecanicii clasice se grupează în trei clase:

1. Descrierea „de particulă”;
2. Descrierea „de câmp”;
3. Descrierea „variațională”.

Primul tip de descriere a fenomenelor mecanice pe care aici l-am intitulat „de particulă”, nu este altul decât formularea mecanicii așa cum rezultă ea din principiile lui Newton.

*Toate descrierile mecanicii clasice altele decât cea de particulă se numesc* ***descrieri analitice ale mecanicii***.

În cele ce urmează vom prezenta două din descrierile variaționale și anume descrierea folosind ecuațiile lui Lagrange și descrierea folosind *ecuațiile canonice ale lui Hamilton*. Aceste moduri de descriere, pe lângă faptul că sunt foarte utile în rezolvarea unor tipuri particulare de probleme mecanice, au avantajul de a permite extinderea instrumentelor matematice dezvoltate în cadrul mecanicii și în alte ramuri ale fizicii.

***Coordonate generalizate***

În mod obișnuit, pentru precizarea poziției unui punct material, se folosesc coordonatele carteziene. În locul celor trei coordonate carteziene se pot folosi altfel de coordonate. De exemplu, coordonatele sferice sau coordonatele cilindrice pe care le-am studiat anterior. După cum știm în coordonatele cilindrice și sferice, celor trei mărimi x, y și z din coordonatele carteziene le corespund mărimile ρ, θ, φ, în coordonate sferice, respectiv ρ, θ, z, în coordonate cilindrice. Constatăm că numărul de variabile independente rămâne nemodificat (trei în cazul punctului material liber). În cazul unui sistem de puncte materiale independente, fiecărui punct material i se asociază un ansamblu de trei variabile independente. Dacă sistemul conține N puncte materiale, numărul coordonatelor independente ce caracterizează sistemul este 3N. Cele 3N coordonate independente pot fi considerate dimensiunile unui spațiu euclidian 3N dimensional. În aceste condiții, sistemul de N puncte materiale poate fi reprezentat ca un punct în spațiul 3 N dimensional.

*Spațiul euclidian 3N dimensional al tuturor coordonatelor independente ale celor N puncte materiale se numește* ***spațiul configurațiilor*** *al sistemului mecanic dat*.

Coordonatele carteziene în spațiul configurațiilor n-dimensional se noteze cu xi, . Coordonatele carteziene din spaţiul configuraţiilor pot fi înlocuite, ca şi în cazul punctului material, cu altfel de coordonate.

*În literatura de specialitate, coordonatele altele decât cele carteziene se numesc* ***coordonate generalizate***.

Coordonatele generalizate se notează cu qi. Evident, numărul coordonatelor generalizate este egal cu numărul coordonatelor carteziene, pentru un sistem de puncte materiale. Derivatele coordonatelor generalizate în raport cu timpul se numesc, prin analogie cu cazul coordonatelor carteziene, ***viteze*** () respectiv ***accelerații generalizate*** (). Folosirea coordonatelor generalizate poate duce la simplificarea calculelor.

x2

x2 P (x1,x2)

M1 M2 x

x1  x1

Fig.1 Reprezentarea situației problemei fizice a mișcării unidimensionale a două puncte materiale (stânga) în spațiul configurațiilor asociat (dreapta)

***Legături. Grade de libertate***

În multe situații mișcările punctelor materiale nu pot să fie independente între ele. Dacă este îndeplinită o anumită condiție prin care pozițiile punctelor materiale sunt corelate, numărul de variabile independente se micșorează.

*Se numește* ***legătură****, o restricție geometrică impusă mișcării sistemului de puncte materiale*.

Există mai multe moduri de clasificare a legăturilor. *Dacă legătura este dată sub forma unei ecuații ea se numește* ***bilaterală***. Exemplu de legătură bilaterală este suprafața unei sfere pe care punctul material este obligat să se miște. Ecuația:

reprezintă legătura bilaterală.

*Dacă restricția este dată sub forma unei inegalități, legătura se numește* ***unilaterală***.

În cele ce urmează facem o scurtă clasificare a legăturilor bilaterale mai des utilizate. În general, ecuația ce descrie legătura poate să conțină în mod explicit timpul. *O legătură în care timpul apare în mod explicit se numește* ***reonomă***. Dacă timpul nu apare în mod explicit în ecuația legăturii, legătura se numește scleronomă.

O altă clasificare este dată de prezenta sau absența derivatelor în raport cu timpul a coordonatelor generalizate în ecuația legăturii. *În cazul în care în ecuația legăturii nu apar vitezele și accelerațiile generalizate ( respectiv ), legătura se numeşte* ***olonomă***. *În cazul în care în ecuaţia ce descrie legătura apar vitezele şi acceleraţiile generalizate, legătura se numește* ***neolonomă***. Există și alte clasificări ale legăturilor.

Prezenta uneia sau a mai multor legături face ca o parte din variabilele ce caracterizează mișcarea să devină dependente de celelalte variabile. Pentru fiecare legătură, numărul coordonatelor generalizate independente se reduce cu o unitate. Astfel, pentru un sistem de N puncte materiale, dacă există n legături, numărul coordonatelor independente este 3N-n.

*Se numesc* ***grade de libertate*** *ale unui sistem mecanic, numărul coordonatelor generalizate independente ale acestuia*.

Numărul gradelor de libertate se noteze cu l. Pentru un sistem mecanic cu l grade de libertate dimensiunea spațiului configurațiilor este egală cu l.

***Descrierea Lagrangeană a mecanicii***

Pentru a introduce ecuațiile lui Lagrange, vom porni de la un exemplu simplu de sistem mecanic: un punct material ce se mișcă în lungul unei axe sub influența unei forțe de tip conservativ.

M x

Fig.2 Punct material ce se mișcă unidimensional sub influența unei forțe conservative

Pentru acest sistem mecanic simplu, se pot defini energiile cinetice și potențiale:

4.1

Să pornim descrierea mișcării acestui sistem mecanic de la formula fundamentală a dinamicii (deci de la descrierea Newtoniană). Ținând cont de faptul că mișcarea este unidimensională, formula fundamentală se scrie ca o ecuație scalară:

Folosindu-ne de definiția energiei potențiale, rezultă:

În lecția precedentă am reamintit noțiunea de diferențială a unei funcții. Ținând cont de acea definiție, din formula precedentă, rezultă că:

4.2

Să derivăm acum relația de definiție a energiei cinetice în raport cu variabila de care depinde în mod explicit (adică în raport cu viteza). Rezultă:

Derivând egalitatea precedentă în raport cu timpul, obținem:

Deoarece derivata în raport cu timpul a vitezei este accelerația, rezultă că:

4.3

Introducând formulele 4.2 și 4.3 în formula fundamentală a mecanicii, rezultă:

Trecând totul în membrul drept, putem scrie mai elegant:

Această ecuație conține derivatele a două funcții diferite: energia cinetică și energia potențială. Pentru ai da o formă mai unitară, definim o funcție ce cuprinde ambele energii. Fie:

4.5

această funcție. În aceste condiții, rezultatul la care ajungem este:

4.6

Ecuația 4.6 se numește ecuația lui Lagrange pentru sistemul dat. Funcția L dată de 4.5 se numește funcția lui Lagrange sau lagangeana pentru acest sistem.

Formulele 4.5 și 4.6 sunt deduse din principiile lui Newton și deci sunt echivalente cu acestea. Acest rezultat poate fi extins la cazul mai general al unui sistem de puncte materiale cu legături supus acțiunii unor forțe conservative. Să presupunem că l este numărul gradelor de libertate ale acestui sistem. Să presupunem că descriem mișcarea acestui sistem într-un sistem de coordonate generalizate. Fie și cu coordonatele respectiv vitezele generalizate. Energia cinetică, depinzând de viteze poate fi scrisă ca o funcție de vitezele generalizate:

Energia potențială, fiind funcție de poziție, poate fi exprimată ca o funcție de coordonatele generalizate. Mai general, se poate admite că energia potențială în fiecare punct se schimbă în timp. Astfel încât putem scrie:

Cu cele două energii se poate defini o funcție lagrangeană ca în relația 4.5. Rezultă că aceasta este o funcție de coordonatele generalizate, vitezele generalizate și timp:

4.7

În ceea ce privește ecuația 4.6, aceasta se va transforma într-un sistem de l ecuații asemănătoare: câte una pentru fiecare coordonată generalizată independentă. În locul derivatei după axa carteziană x, se va face derivata după una din coordonatele generalizate iar în locul derivatei după viteza liniară *v*, se va face derivata după viteza generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate .

Dacă din punct de vedere fizic lucrurile sunt evidente, apare totuși o problemă de matematică: în 4.7 lagrangeanul nu este o funcție de o singură variabilă ci o funcție de 2l+1 variabile independente. În analiza matematică de liceu s-au introdus noțiunile de derivată și integrală pentru funcțiile de o singură variabilă reală. Pentru a putea face derivatele funcției 4.7 după una din variabilele independente ce o caracterizează, trebuie să extindem noțiunea de derivată pentru funcțiile de mai multe variabile.

*Puține noțiuni de analiza matematică a funcțiilor de mai multe variabile reale*

*Fie funcția:*

*Se numește* ***derivata parțială a funcției f în raport cu x*** *în punctul x0 limita (dacă există):*

*Se poate întâmpla ca una sau mai multe variabile ce definesc funcția să fie exprimate ca funcție de celelalte variabile. Pentru a simplifica lucrurile, să presupunem că avem cazul unei funcții reale de două variabile:*

*Să admitem că variabila y este dată ca o funcție de x*

*În acest caz, putem defini derivata parțială a funcție z în raport cu x, conform limitei de mai sus (adică menținând valoarea variabilei y constantă -deși ea depinde de x!). Dacă nu menținem constantă variabila y când variabila x tinde spre x0 se definește o nouă derivată numită derivata totală a funcției z în raport cu x. Această derivată totală este dată de formula:*

Pe baza generalizării noțiunii de derivată la funcțiile de mai multe variabile, se poate scrie sistemul de ecuații Lagrange astfel:

4.8

Ecuațiile 4.8, în cazul în care lagrangeanul poate fi scris ca diferența dintre o funcție ce depinde doar de viteze (energia cinetică) și o funcție ce depinde doar de poziție și, eventual, de timp (energia potențială) sunt echivalente cu ecuațiile obținute din formula fundamentală a dinamicii a lui Newton dacă forțele sunt conservative. După cum știm, forțele nu sunt toate conservative. În acest caz nu se poate introduce funcția Lagrange conform ecuației 4.5. Pentru ca ecuațiile Lagrange 4.8 să se aplice la toate problemele de mecanică se face următoarea ipoteză: *pentru orice sistem mecanic există o funcție L de pozițiile generalizate, vitezele generalizate și timp astfel încât mișcarea acestuia să fie descrisă de ecuațiile 4.8*.

Trebuie făcută o observație: ipoteza de mai sus nu derivă din ecuațiile lui Newton astfel încât nu putem afirma, pe cazul general, că un sistem de puncte materiale ce evoluează sub influența unui câmp arbitrar de forțe este întotdeauna echivalent cu un sistem mecanic descris de o funcție Lagrange ce satisface ecuațiile Lagrange și invers, un sistem mecanic descris de o funcție Lagrange arbitrară dar care satisface ecuațiile lui Lagrange nu putem spunem că este echivalent cu un sistem mecanic ce se mișcă sub influența unui câmp arbitrar de forțe astfel încât să satisfacă formula fundamentală a dinamicii. Această echivalență nu a fost demonstrată până acum dar, pe toate cazurile de interes fizic pe care au fost aplicate cele două descrieri ale mecanicii clasice, s-a putut dovedi echivalența.

***Impulsuri generalizate. Spațiul fazelor***

Revenind la definiția energiei cinetice pentru un punct material ce se mișcă pe o axă carteziană, constatăm că derivata acesteia în raport cu viteza reprezintă impulsului acestuia în lungul acelei axe:

Pe baza acestei observații putem să extindem noțiunea de impuls și pentru coordonatele generalizate ale unui sistem de puncte materiale cu l grade de libertate astfel:

4.9

*Mărimile fizice definite prin relațiile 4.9 se numesc* ***impulsuri generalizate***.

Un punct material este descris la orice moment de timp, din punct de vedere mecanic, prin două caracteristici: poziția în spațiu, precizată prin valoarea tuturor coordonatelor sale și tendința de mișcare pe care o are, exprimată prin impulsul său. Această descriere mecanică se poate extinde și la un sistem de puncte materiale cu l grade de libertate prin precizarea simultană a valorilor coordonatelor generalizate independente și a impulsurilor generalizate corespunzătoare.

*Se numește* ***stare mecanică sau fază*** *a unui sistem mecanic cu l grade de libertate, totalitatea valorilor coordonatelor generalizate independente și a valorilor impulsurilor generalizate corespunzătoare la un anumit moment de timp*.

După cum am precizat configurația sistemului de puncte materiale poate fi reprezentată ca un punct într-un spațiu l dimensional. Extinzând spațiul configurațiilor cu încă l dimensiuni corespunzătoare impulsurilor asociate fiecărei coordonate independente, se obține un nou spațiu 2l dimensional.

*Se numește* ***spațiul fazelor*** *pentru un sistem cu l grade de libertate, spațiul 2l dimensional format din mulțimea coordonatelor generalizate independente și a impulsurilor generalizate asociate acestora*.

O stare mecanică (fază) a sistemului se va reprezenta ca un punct în interiorul spațiului fazelor.

pi

qi

Fig.3 spațiul fazelor și o orbită închisă în interiorul acestuia

În timpul mișcării sistemului mecanic, punctul reprezentativ din spațiul fazelor se mișcă.

*Se numește* ***traiectorie de fază sau orbită*** *linia pe care o descrie faza sistemului în spațiul fazelor ca urmare a mișcării acestuia*.

Deoarece timpul curge într-un singur sens, orbitele sunt parcurse într-un singur sens (sunt orientate).

***Ecuațiile canonice ale lui Hamilton***

Pentru a introduce ecuațiile lui Hamilton, vom face apel la aceeași situație fizică de la care am plecat atunci când am introdus ecuațiile lui Lagrange. Folosind impulsul, energia cinetică a punctului material se scrie astfel:

Derivând expresia energiei cinetice în rapt cu impulsul, rezultă:

4.10

Folosind relația 4.2 de legătură între forță și energia potențială precum și legea fundamentală a dinamicii scrisă cu ajutorul impulsului, rezultă:

4.11

Relațiile 4.10 și 4.11 reprezintă un sistem de două ecuații cu două necunoscute (x și p). Teoretic, prin rezolvarea acestui sistem se poate stabili evoluția în timp atât a poziției cât și a impulsului punctului material. Pentru a da o formă unitară celor două ecuații, se introduce funcția:

4.12

Cu ajutorul funcție H, sistemul de ecuații 4.10 și 4.11 se rescrie astfel:

4.13

Ecuațiile 4.13 se numesc ecuațiile lui Hamilton pentru sistemul dat iar funcția 4.12 se numește funcția lui Hamilton sau hamiltoniana pentru sistemul dat.

Formulele 4.12 și 4.13 sunt deduse din principiile lui Newton și deci sunt echivalente cu acestea. Acest rezultat poate fi extins la cazul mai general al unui sistem de puncte materiale cu legături supus acțiunii unor forțe conservative. Să presupunem că l este numărul gradelor de libertate ale acestui sistem. Să presupunem că descriem mișcarea acestui sistem într-un sistem de coordonate generalizate. Fie și cu coordonatele respectiv impulsurile generalizate. Energia cinetică, depinzând de impulsuri poate fi scrisă ca o funcție de impulsurile generalizate:

Energia potențială, fiind funcție de poziție, poate fi exprimată ca o funcție de coordonatele generalizate. Mai general, se poate admite că energia potențială în fiecare punct se schimbă în timp. Astfel încât putem scrie:

Cu cele două energii se poate defini o funcție hamiltoniană ca în relația 4.12. Rezultă că aceasta este o funcție de coordonatele generalizate, impulsurile generalizate și timp:

4.14

În ceea ce privește ecuațiile 4.13, acestea se vor transforma într-un sistem de 2l ecuații asemănătoare: câte una pentru fiecare coordonată generalizată independentă. În locul derivatei după axa carteziană x, se va face derivata după una din coordonatele generalizate iar în locul derivatei după impulsul liniar *p*, se va face derivata după impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate .

Folosindu-ne de noțiunea de derivată parțială, putem scrie sistemul de ecuații Hamilton astfel:

4.15

Ecuațiile 4.15, în cazul în care hamiltonianul poate fi scris ca suma dintre o funcție ce depinde doar de impulsuri (energia cinetică) și o funcție ce depinde doar de poziție și, eventual, de timp (energia potențială) sunt echivalente cu ecuațiile obținute din formula fundamentală a dinamicii a lui Newton dacă forțele sunt conservative. După cum știm, forțele nu sunt toate conservative. În acest caz nu se poate introduce funcția Hamilton conform ecuației 4.12. Pentru ca ecuațiile Hamilton 4.15 să se aplice la toate problemele de mecanică, se face următoarea ipoteză: *pentru orice sistem mecanic există o funcție H de pozițiile generalizate, impulsurile generalizate și timp astfel încât mișcarea acestuia să fie descrisă de ecuațiile 4.15*.

Trebuie făcută o observație: ipoteza de mai sus nu derivă din ecuațiile lui Newton astfel încât nu putem afirma, pe cazul general, că un sistem de puncte materiale ce evoluează sub influența unui câmp arbitrar de forțe este întotdeauna echivalent cu un sistem mecanic descris de o funcție Hamilton ce satisface ecuațiile Hamilton și invers, un sistem mecanic descris de o funcție Hamilton arbitrară dar care satisface ecuațiile lui Hamilton nu putem spune că este echivalent cu un sistem mecanic ce se mișcă sub influența unui câmp arbitrar de forțe astfel încât să satisfacă formula fundamentală a dinamicii. Această echivalență nu a fost demonstrată până acum dar, pe toate cazurile de interes fizic pe care au fost aplicate cele două descrieri ale mecanicii clasice, s-a putut dovedi echivalența.

În limita valabilității ipotezelor menționate anterior, cele trei tipuri de ecuații: Newtoniene, Lagrangeene și Hamiltoniene, descriu la fel de bine mișcarea mecanică a oricărui sistem de puncte materiale. Cu toate că din punct de vedere teoretic ele sunt echivalente, din punct de vedere practic, în rezolvarea diferitelor probleme se poate dovedi că doar una din aceste metode este cea mai simplă. Din acest motiv, înainte de a rezolva o problemă de mecanică, este bine să analizăm care din metodele prezentate mai sus este cea mai practică.